

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Косенко Сергей Михайлович
Должность: ректор
Дата подписания: 16.06.2026 09:20:58
Уникальный программный ключ:
e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdcf836

Оценочные материалы для промежуточной аттестации по дисциплине

Высшая математика, семестр 1, 2

Код, направление подготовки	13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника
Направленность (профиль)	Теплоэнергетика и теплотехника
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Прикладной математики
Выпускающая кафедра	Радиоэлектроники и электроэнергетики

Типовые задания для контрольной работы за первый семестр

Контрольная работа № 1

1. Вычислить $\frac{4-3i}{4+3i}$.

2. Построить область точек z по условиям:

$$2 < |z| < 4 \text{ и } -\pi < \varphi < -\pi/2.$$

3. Найти \sqrt{i} .

4. Построить параллелограмм на векторах $\overline{OA} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\overline{OB} = \mathbf{k} - 3\mathbf{j}$, определить его диагонали.

5. Вектор составляет с осями Ox и Oy углы 40° и 80° . Найти его угол с осью Oz .

6. Даны вектора $a = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $b = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Определить $\text{pr}_a b$ и $\text{pr}_b a$.

7. Упростить выражение $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

8. Вычислить объем пирамиды с вершинами $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;3;8)$. Найти высоту, опущенную на грань ABC .

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

11. Найти ФСР, общее решение и одно частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}.$$

12. Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

13. Решить матричное уравнение методом нахождения обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

14. Найти проекцию точки $(1,2,8)$ на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = z$.

15. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, -1, 3)$ и отсекающие на осях равные отрезки.

16. Показать, что прямая $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$.

Типовые задания для контрольной работы за второй семестр

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x$

2. Найти производную третьего порядка для функции:

$$y = (x^2 + 1)\operatorname{arctg}x$$

3. Провести исследование функции и построить эскиз графика функции:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

4. Вычислить неопределенные интегралы

а) $\int x \operatorname{arctg}x dx$;

б) $\int x^2 e^{x^3 - 2} dx$

5. Найти массу пластины с плотностью $\mu = 7x^2 + y$, если пластина ограничена линиями $x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0)$.

6. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n};$$

Типовые вопросы к экзамену за первый семестр

1. Матрицы: определение и алгебраические операции. Определение матрицы. Операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц (условие согласованности), транспонирования. Свойства этих операций (коммутативность сложения, ассоциативность, дистрибутивность, отсутствие коммутативности умножения).
2. Определители квадратных матриц: свойства и вычисление. Определение определителя квадратной матрицы (для 2-го и 3-го порядков). Свойства определителей (транспонирование, перестановка строк, вынос множителя, линейность, определитель произведения). Вычисление определителя разложением по строке или столбцу.
3. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): методы решения, теорема Кронекера — Капелли. Определение СЛАУ. Теорема Кронекера — Капелли (критерий совместности). Методы решения: правило Крамера (для квадратных невырожденных систем), метод Гаусса (последовательное исключение неизвестных). Однородные системы: структура общего решения.
4. Ранг матрицы: определение и способы нахождения. Определение ранга матрицы (наивысший порядок ненулевого минора). Способы нахождения: метод окаймляющих миноров, метод элементарных преобразований (приведение к ступенчатому виду). Свойства ранга матрицы.
5. Обратимость матриц: критерии существования, вычисление обратной матрицы. Определение обратной матрицы. Критерий существования: матрица должна быть квадратной и невырожденной (определитель $\neq 0$). Алгоритмы вычисления: через присоединённую матрицу (союзную) и методом Гаусса – Жордана (одновременное преобразование исходной и единичной матриц).
6. Линейные (векторные) пространства: аксиоматика, подпространства, линейная оболочка. Определение линейного пространства. Аксиомы (замкнутость операций, ассоциативность, коммутативность сложения, существование нулевого и противоположного элементов, дистрибутивность). Примеры. Подпространство: определение, критерий подпространства. Линейная оболочка системы векторов.
7. Линейные операторы: матрица оператора, ядро, образ, собственные значения и собственные векторы. Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора в заданном базисе. Ядро оператора (определение, размерность) и образ оператора (определение, размерность). Собственные значения и собственные векторы: определение, характеристическое уравнение, нахождение собственных векторов.

8. Квадратичные формы: матрица формы, приведение к каноническому виду, закон инерции Сильвестра. Определение квадратичной формы от n переменных. Матрица квадратичной формы (симметрическая). Приведение к каноническому виду (метод Лагранжа выделения полных квадратов). Закон инерции Сильвестра (инвариантность числа положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов). Критерий Сильвестра знакоопределённости.

9. Векторы: определение, равенство, нулевой вектор. Определение геометрического вектора (направленный отрезок). Равенство векторов (одинаковая длина, одинаковое направление, сонаправленность). Нулевой вектор (начало совпадает с концом, направление не определено, длина равна нулю). Свободные, связанные и скользящие векторы (кратко).

10. Линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение на число. Сложение векторов: правило треугольника и правило параллелограмма. Вычитание векторов как сложение с противоположным. Умножение вектора на число: определение, изменение длины и направления при умножении. Свойства линейных операций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность).

11. Линейная зависимость и независимость системы векторов: критерии и геометрический смысл. Определения линейной комбинации, линейной зависимости и независимости системы векторов. Критерии: система линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов выражается через остальные. Геометрический смысл: на плоскости — два вектора зависимы, если они коллинеарны; в пространстве — три вектора зависимы, если они компланарны.

12. Базис и координаты вектора: разложение вектора по базису, единственность координат. Определение базиса на плоскости и в пространстве (линейно независимая система, через которую выражается любой вектор). Теорема о разложении вектора по базису (существование и единственность). Координаты вектора в данном базисе. Свойства координат при линейных операциях.

13. Системы координат (декартовы прямоугольные, аффинные, полярная). Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве: оси, начало координат, координатные плоскости. Аффинная система координат (общий случай, оси не обязательно перпендикулярны). Полярная система координат: полюс, полярная ось, полярный радиус и угол. Связь полярных координат с декартовыми.

14. Скалярное произведение: определение, свойства, вычисление через координаты, геометрический смысл. Определение скалярного произведения геометрических векторов (произведение длин на косинус угла). Свойства: коммутативность, дистрибутивность, линейность по каждому аргументу, связь с длиной. Вычисление через координаты в ортонормированном базисе.

Геометрический смысл: длина вектора, угол между векторами, условие перпендикулярности, проекция вектора на направление.

15. Векторное произведение: определение, геометрический смысл (площадь, ориентация), свойства. Определение векторного произведения (вектор, перпендикулярный двум исходным, длина равна площади параллелограмма, направление по правилу правого винта). Геометрический смысл: площадь параллелограмма и ориентация (правой или левой тройки). Свойства: антикоммутативность, дистрибутивность, линейность. Вычисление через координаты (определитель).

16. Смешанное произведение: геометрический смысл (объём параллелепипеда), условие компланарности. Определение смешанного произведения как скалярного произведения векторного произведения третьего вектора. Геометрический смысл: объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах (со знаком, зависящим от ориентации тройки). Условие компланарности трёх векторов (смешанное произведение равно нулю). Вычисление через определитель матрицы из координат векторов.

17. Прямая на плоскости: виды уравнений, расстояние от точки до прямой. Общее уравнение прямой. Уравнение с угловым коэффициентом. Каноническое (через направляющий вектор и точку) и параметрическое уравнения. Уравнение прямой в отрезках. Расстояние от точки до прямой (формула через общее уравнение). Угол между прямыми (через угловые коэффициенты или направляющие векторы).

18. Плоскость в пространстве: виды уравнений, расстояние от точки до плоскости. Общее уравнение плоскости. Нормальное уравнение плоскости (с нормированным вектором нормали). Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости через три точки. Расстояние от точки до плоскости (формула через общее уравнение). Угол между плоскостями (через нормальные векторы).

19. Прямая в пространстве: параметрические и канонические уравнения, общее уравнение как пересечение двух плоскостей. Параметрические уравнения прямой (направляющий вектор и точка). Канонические уравнения (симметричная форма). Общее уравнение прямой как система двух линейных уравнений, задающих пересекающиеся плоскости. Переход от общего вида к каноническому. Взаимное расположение двух прямых в пространстве (параллельность, пересечение, скрещивание).

20. Взаимное расположение прямой и плоскости: углы, условия параллельности и перпендикулярности, точка пересечения. Условие параллельности прямой и плоскости (направляющий вектор прямой перпендикулярен нормальному вектору плоскости). Условие перпендикулярности (направляющий вектор прямой коллинеарен нормальному вектору плоскости). Угол между прямой и плоскостью (дополнение до 90° угла между направляющим вектором и нормалью). Алгоритм

нахождения точки пересечения прямой и плоскости (через параметрические уравнения).

21. Кривые второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола (канонические уравнения и основные свойства). Эллипс: каноническое уравнение, геометрическое определение (сумма расстояний до фокусов постоянна), полуоси, эксцентриситет, фокусы, директрисы. Гипербола: каноническое уравнение, геометрическое определение (модуль разности расстояний до фокусов постоянен), полуоси, эксцентриситет, асимптоты. Парабола: каноническое уравнение, геометрическое определение (равенство расстояний до фокуса и директрисы), параметр, ось симметрии.

22. Поверхности второго порядка в пространстве: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндры (краткая характеристика). Эллипсоид: каноническое уравнение, полуоси, форма (вытянутый, сжатый, сфера). Однополостный и двуполостный гиперболоиды: канонические уравнения, форма сечения плоскостями. Эллиптический и гиперболический параболоиды: канонические уравнения, седловая форма. Конус второго порядка (круговой конус). Цилиндры (эллиптический, гиперболический, параболический): образующая, направляющая.

23. Комплексные числа: алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы; арифметические операции; формула Муавра. Алгебраическая форма (действительная и мнимая части, мнимая единица $i^2 = -1$). Тригонометрическая форма (модуль, аргумент, главное значение аргумента). Показательная форма (формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$). Арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление (в алгебраической и тригонометрической формах). Формула Муавра (возведение в степень). Извлечение корня n -й степени из комплексного числа (n различных значений).

24. Многочлены: степень, корни многочлена, схема Горнера, основная теорема алгебры, разложение на множители. Определение многочлена (полинома) от одной переменной. Степень многочлена. Корень многочлена: определение, кратность корня. Схема Горнера (деление многочлена на линейный множитель, вычисление значения в точке, понижение степени). Основная теорема алгебры (всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень). Следствия: разложение многочлена на линейные множители (с учётом кратностей) и на неприводимые множители над \mathbb{R} (линейные и квадратичные).

Все вопросы сформулированы развёрнуто, с конкретизацией содержания, по аналогии с предыдущим списком из 29 вопросов.

Типовые вопросы к экзамену за второй семестр

1. Высказывания и логические операции. Определение высказывания (истина, ложь). Логические связки: отрицание (\neg), конъюнкция (\wedge), дизъюнкция (\vee), импликация (\rightarrow), эквивалентность (\leftrightarrow). Таблицы истинности для каждой операции.
2. Формулы логики высказываний и их равносильные преобразования. Понятие логической формулы. Порядок выполнения операций. Основные законы логики: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, законы де Моргана, закон исключённого третьего, закон противоречия, законы поглощения. Тождественно истинные, тождественно ложные и выполнимые формулы.
3. Булевы функции. Определение булевой функции от n переменных. Способы задания: таблица истинности, вектор значений, аналитическая форма. Существенные и фиктивные переменные. Основные классы булевых функций (сохранение 0, сохранение 1, самодвойственные, линейные, монотонные). Теорема Поста о полноте (ознакомительно).
4. Нормальные формы булевых функций. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) и конъюнктивная нормальная форма (КНФ). Совершенная ДНФ (СДНФ) и совершенная КНФ (СКНФ): построение по таблице истинности. Минимизация булевых функций (метод Карт Карно для 3–4 переменных).
5. Логические основы компьютеров. Логические элементы (И, ИЛИ, НЕ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ). Схемы из логических элементов. Примеры: полусумматор, сумматор, триггер (кратко).
6. Понятие множества и операции над множествами. Определение множества. Способы задания: перечисление, характеристическое свойство. Пустое и универсальное множества. Подмножество. Включение. Равенство множеств. Диаграммы Эйлера – Венна. Объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическая разность. Свойства операций.
7. Мощность множества. Формула включений-исключений. Мощность конечного множества. Формула включений-исключений для двух и трёх множеств. Примеры применения.
8. Декартово произведение множеств. Упорядоченная пара, кортеж. Декартово произведение $A \times B$. Степень множества A^n .
9. Бинарные отношения: определение и способы задания. Определение бинарного отношения. Способы задания: матрица, граф, перечисление пар. Область определения и область значений отношения. Примеры.

10. Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности. Рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Отношение эквивалентности: определение, классы эквивалентности, фактор-множество. Примеры.

11. Отношение порядка. Частичный и строгий порядок. Линейный порядок. Диаграмма Хассе. Примеры (числовые множества, отношение делимости).

12. Функции как частный случай отношений. Функциональное отношение (функция). Область определения и область значений. Инъективные, сюръективные, биективные функции. Обратная функция.

13. Определение и способы задания функции. Понятие функции. Область определения, множество значений. Способы задания: аналитический, табличный, графический, параметрический. Элементарные функции. Сложная и обратная функция.

14. Предел функции. Определение предела функции в точке (по Коши и по Гейне). Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы.

15. Непрерывность функции. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва: устранимый разрыв, скачок (разрыв первого рода), разрыв второго рода. Свойства непрерывных функций (теоремы Вейерштрасса, Коши).

16. Задачи, приводящие к понятию производной. Задача о скорости движения (мгновенная скорость). Задача о касательной к кривой (угловой коэффициент). Физический и геометрический смысл производной.

17. Производная и дифференциал функции. Определение производной. Правила дифференцирования (сумма, произведение, частное). Таблица производных элементарных функций. Производная сложной и обратной функции. Производные высших порядков. Дифференциал: определение, геометрический смысл, инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала в приближённых вычислениях.

18. Основные теоремы дифференциального исчисления. Теоремы Ферма (необходимое условие экстремума), Ролля (о нуле производной), Лагранжа (о конечном приращении), Коши (об отношении приращений). Правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей.

19. Исследование функций и построение графиков. Монотонность функции (признак возрастания/убывания через производную). Экстремумы (необходимое и

достаточные условия). Критические точки. Выпуклость и вогнутость графика. Точки перегиба. Асимптоты (вертикальные, горизонтальные, наклонные).

20. Общая схема построения графиков функций. Последовательность исследования: область определения, чётность/нечётность, периодичность; точки пересечения с осями; асимптоты; интервалы монотонности и экстремумы; интервалы выпуклости и точки перегиба; дополнительные точки; построение графика.

21. Первообразная и неопределённый интеграл. Понятие первообразной функции. Неопределённый интеграл: определение, свойства. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной (подстановка), интегрирование по частям.

22. Интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных выражений. Интегрирование рациональных дробей (разложение на простейшие дроби). Интегрирование тригонометрических выражений (универсальная подстановка, частные приёмы). Интегрирование иррациональных выражений (основные приёмы).

23. Определённый интеграл. Определение определённого интеграла как предела интегральных сумм (Римана). Геометрический смысл (площадь криволинейной трапеции). Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Вычисление определённого интеграла методами замены переменной и интегрирования по частям.

24. Приложения определённого интеграла. Вычисление площади плоской фигуры. Вычисление объёма тела вращения. Вычисление длины дуги кривой. Физические приложения: работа переменной силы, центр масс (кратко).

25. Числовые ряды. Определение числового ряда. Частичные суммы, сходимость и расходимость ряда. Необходимый признак сходимости. Признаки сходимости знакоположительных рядов: признаки сравнения, Даламбера, Коши (радикальный и интегральный). Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютная и условная сходимость.

26. Функциональные ряды. Степенные ряды. Определение функционального ряда. Область сходимости. Степенные ряды: определение, радиус сходимости, интервал сходимости. Формула Коши – Адамара. Свойства степенных рядов (почленное дифференцирование и интегрирование). Разложение функций в степенные ряды (ряд Маклорена для e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$).

27. Ряды Фурье. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье для периодической функции (период 2π и $2l$). Теорема Дирихле (условия

сходимости ряда Фурье). Ряд Фурье для чётных и нечётных функций (разложение по косинусам и синусам).

28. Преобразование Фурье. Определение интегрального преобразования Фурье. Прямое и обратное преобразование Фурье. Свойства (линейность, связь с производной). Применение для решения дифференциальных уравнений (ознакомительно).

29. Преобразование Лапласа. Определение преобразования Лапласа для функции-оригинала. Свойства (линейность, дифференцирование оригинала, интегрирование оригинала). Таблица основных преобразований. Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений и систем.